Géométrie pour la mécanique

Renaud Costadoat
Lycée Dorian

Introduction

Savoir

Vous êtes capables :

- de résoudre des équations différentielles à l'aide des transformées de Laplace,
- de représenter des réponses impulsionnelles et indicielles,
- de représenter un SLCI à l'aide d'un schéma blocs.

Problematique

Vous devez êtes capables :

- de déterminer la loi entrée/sortie d'une chaîne de transmission,
- de modéliser la géométrie d'un système.

Introduction mathématique

Objectif

La mécanique a pour objet l'étude du **mouvement**, des déformations ou des états d'équilibre des systèmes physiques.

Afin d'appréhender la **modélisation** et la **résolution** de ces problèmes il est nécessaire de revoir les notions de mathématique suivantes:

- le vecteur,
- le produit scalaire,
- le produit vectoriel,
- le champ de vecteurs,
- le torseur,
- les repères et axes de coordonnées.

Vecteur Champ de vecteur et torseur Repères de projection

Vecteur

Definition

Un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- .... : la droite (D) passant par A et B,
- .... : de A vers B,
- .... : la distance d entre les points A et B.

- **Vecteur glissant:** Un vecteur glissant (ou glisseur) est défini par une droite (D) et un vecteur $\overrightarrow{V}$. Deux vecteurs glissants sont équivalents s'ils ont même support et même vecteur représentant.
- **Vecteur lié:** Un vecteur lié est défini par une origine A et un vecteur $\overrightarrow{V}$.

Composantes d'un vecteur

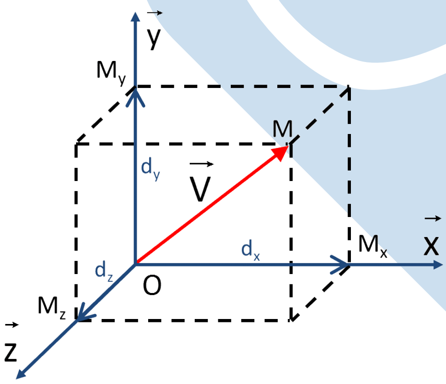
- **Repère orthonormé direct**: Un repère orthonormé direct de dimension 3, (R), est constitué d'une base orthonormée directe de dimension 3.

Elle est définie par trois vecteurs unitaires (de norme 1) $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$ tels que $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = 0$ et $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}$, soit son origine O, on le note : $R(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$.

Plan

Spatial

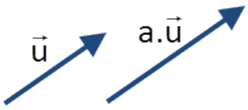
- Soit un point M, sa position dans $R(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ est le vecteur $\overrightarrow{OM}$,
- $\overrightarrow{OM} = dx.\overrightarrow{x} + dy.\overrightarrow{y} + dz.\overrightarrow{z}$.
- Écriture en colonne: $\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$
- Norme: $||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$



Produit d'un vecteur par un scalaire

Le terme **scalaire** désigne ici un nombre réel. Le produit d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ par un scalaire a est un vecteur noté : $a.\overrightarrow{u}$.

- de même direction et sens que $\overrightarrow{u}$, dont la longueur vaut: $a.||\overrightarrow{u}||$, si $a > 0$,
- de même direction mais de sens contraire que $\overrightarrow{u}$, dont la longueur vaut : $-a.||\overrightarrow{u}||$, si a < 0,
- il s'agit d'un vecteur nul si a = 0.



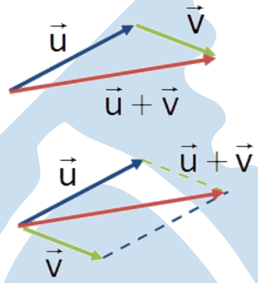
Le produit d'un vecteur par un scalaire est **distributif** sur l'addition des scalaires : $(a+b).\overrightarrow{u} = a.\overrightarrow{u} + b.\overrightarrow{u}$ mais il n'est pas commutatif : la notation $\overrightarrow{u}.a$ n'a pas de sens.

Remarque : deux vecteurs sont colinéaires (parallèles) si et seulement s'ils sont proportionnels, c'est-à-dire s'il existe un nombre a tel que $\overrightarrow{u} = a.\overrightarrow{v}$.

Somme de deux vecteurs

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur, noté $\vec{u}+\vec{v}$, qui est construit de la manière suivante :

- on amène l'origine du deuxième vecteur à l'extrémité du premier
- la somme est le vecteur qui joint l'origine du premier vecteur à l'extrémité de second
- il s'agit du troisième côté d'un triangle formé par les deux premiers vecteurs



Definition

A partir de trois points A, B et C existe la relation de **Chasles**: ....
Cela permet d'introduire les vecteurs opposés: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

En effet, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$, donc $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Le produit d'un scalaire par un vecteur est distributif sur l'addition des vecteurs :
$a.(\vec{u}+\vec{v}) = a.\vec{u}+a.\vec{v}$

Produit scalaire de deux vecteurs

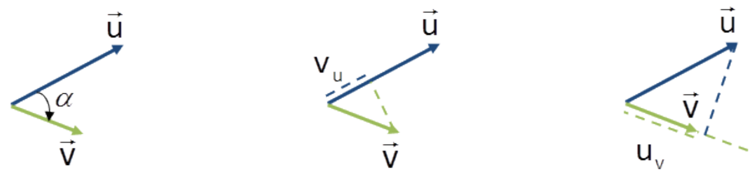
Definition

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs faisant un angle géométrique α, le produit scalaire noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel valant: ....

Le produit scalaire est nul

- Si l'un des vecteurs est nul
- Si l'angle entre eux est droit (c'est-à-dire si et $\alpha = \frac{\pi}{2} rad = 90$),
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dans ce cas orthogonaux.

Le produit scalaire strictement positif si l'angle est aigu et strictement négatif si l'angle est obtus. Dans les cas suivants, $\vec{u}.\vec{v} = v_u.\|\vec{u}\| = u_v.\|\vec{v}\|$.



Propriétés du produit scalaire de deux vecteurs

- Le produit scalaire est commutatif $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$,
- Il est distributif sur l'addition des vecteurs $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$,
- Le vecteur nul est l'élément absorbant du produit scalaire $\vec{u}.\vec{0} = \vec{0}.\vec{u} = 0$,
- $\vec{u}.\vec{u}$ s'appelle le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$ et se note $\vec{u}^2$, ainsi $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$,
- Le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de sa norme $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ et donc $\sqrt{\vec{u}^2} = \|\vec{u}\|$,
- Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, $\vec{u}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$,
- Dans le plan rapporté à une base orthonormale $(\vec{i},\vec{j})$, $\vec{u}.\vec{v} = u_x.v_x + u_y.v_y$
- Dans le plan rapporté à une base orthonormale $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $\vec{u}.\vec{v} = u_x.v_x + u_y.v_y + u_z.v_z$

Produit vectoriel de deux vecteurs

Definition

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est un vecteur:

- normal au plan vectoriel de base $(\vec{u},\vec{v})$,
- dont la norme vaut ....
- tel que $(\vec{u},\vec{v},(\vec{u}\wedge\vec{v}))$ forme une base directe.

Ainsi, si ($\vec{u}$ et $\vec{v}$) sont colinéaires : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

Dans un repère orthonormé direct:

$$\begin{aligned} \vec{x}\wedge\vec{y} &= \vec{z} & \vec{y}\wedge\vec{x} &= -\vec{z} \\ \vec{y}\wedge\vec{z} &= \vec{x} & \vec{z}\wedge\vec{y} &= -\vec{x} \\ \vec{z}\wedge\vec{x} &= \vec{y} & \vec{x}\wedge\vec{z} &= -\vec{y} \end{aligned}$$

Remarque: Pour retrouver efficacement ces relations, on peut écrire (sur un coin de feuille) : "x y z x y", en parcourant cette liste de gauche à droite, on obtient un signe positif et inversement.

Calcul en composantes du produit vectoriel

Soient les coordonnées $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, ce qui permet de calculer leur produit vectoriel de la façon suivante: $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (u_1.\overrightarrow{x} + u_2.\overrightarrow{y} + u_3.\overrightarrow{z}) \wedge (v_1.\overrightarrow{x} + v_2.\overrightarrow{y} + v_3.\overrightarrow{z})$

$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = u_1.\overrightarrow{x} \wedge v_1\overrightarrow{x} + u_1.\overrightarrow{x} \wedge v_2\overrightarrow{y} + u_1.\overrightarrow{x} \wedge v_3\overrightarrow{z} + u_2.\overrightarrow{y} \wedge v_1\overrightarrow{x} + u_2.\overrightarrow{y} \wedge v_2\overrightarrow{y} + u_2.\overrightarrow{y} \wedge v_3\overrightarrow{z} + u_3.\overrightarrow{z} \wedge v_1\overrightarrow{x} + u_3.\overrightarrow{z} \wedge v_2\overrightarrow{y} + u_3.\overrightarrow{z} \wedge v_3\overrightarrow{z}$

Donc, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (u_2.v_3 - u_3.v_2).\overrightarrow{x} + (u_3.v_1 - u_1.v_3).\overrightarrow{y} + (u_1.v_2 - u_2.v_1).\overrightarrow{z}$

Ce qui s'écrit en colonne: $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} u_2.v_3 - u_3.v_2 \\ u_3.v_1 - u_1.v_3 \\ u_1.v_2 - u_2.v_1 \end{bmatrix}$

Remarque

Un moyen mnémotechnique pour se rappeler de ce résultat revient à placer les deux premières composantes de chaque vecteur sous les autres et à faire 3 **produits en croix** (un pour chaque composante du résultant) à partir de la deuxième ligne.

Produit mixte

Definition

Soient trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, le produit mixte revient à calculer: $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$

Ainsi:

- $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$,
- $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$,
- $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$
- $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (u_x v_y w_z + v_x w_y u_z + w_x u_y v_z) - (w_x v_y u_z + v_x u_y w_z + u_x w_y v_z)$

Si deux des trois vecteurs sont égaux ou colinéaires, le produit mixte est nul.

Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ont même origine, la valeur absolue du produit mixte $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, est égale au volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Double produit vectoriel

- Combiner trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ par deux produits vectoriels successifs permet d'obtenir un double produit vectoriel,
- Exemple: $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$,
- Attention: comme le produit vectoriel n'est ni associatif, ni commutatif, il est nécessaire d'utiliser comme ici des parenthèses et le résultat va dépendre à la fois de l'ordre dans lequel les opérations sont effectuées et de l'ordre de présentation des 3 vecteurs,
- Les 2 formules suivantes peuvent être démontrées:
  $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$
  $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$

Champ de vecteurs

Un champ de vecteurs est une application qui définit un vecteur $\overrightarrow{V_M}$ en tout point de l'espace (champ de vecteurs vitesse, champ magnétique, champ de pesanteur,...),

Definition

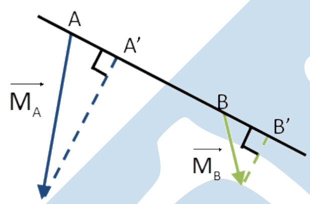
Un champ de vecteurs $\overrightarrow{M_P}$ équiprojectif est un champ de vecteurs qui répond au théorème de Varignon (parfois appelé théorème de BABAR « entre nous »).

- $\overrightarrow{R}$ est un vecteur caractéristique du champ de vecteurs appelé « résultante »
- $\overrightarrow{M_P}$ sont les moments en chaque point P du champ de vecteurs.

L'équiprojectivité

Definition

La propriété d'équiprojectivité d'un tel champ de vecteurs est exprimée par le fait que deux moments $\overrightarrow{M_A}$ et $\overrightarrow{M_B}$ du champ de vecteurs ont la même projection sur la droite passant par les deux points A et B : $\overline{AA'} = \overline{BB'}$



Démonstration: En partant du théorème de Varignon et en multipliant par $\overrightarrow{AB}$, on obtient

$\overrightarrow{M_B}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_A}.\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}).\overrightarrow{AB}$ or $(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}).\overrightarrow{AB} = 0$ donc $AA' = BB'$.

Remarques:

- La distribution des vecteurs vitesse dans un solide indéformable est un champ de vecteurs équiprojectif puisque il respecte le théorème de Varignon,
- L'équiprojectivité entre les vecteurs vitesse peut, donc, être utilisée pour les constructions graphiques.

Le torseur

Un torseur est la représentation d'un champ de vecteurs équiprojectif, dont les vecteurs $\overrightarrow{M_P}$ en chaque point P s'appellent « moments »du torseur. De par les propriétés d'un tel champ, les moments en deux points P et O vérifient la relation de Varignon.

Definition

Éléments de réduction d'un torseur

Un torseur est donc déterminé par deux vecteurs, constituant sa « réduction »en un point quelconque P de l'espace, à savoir :

- La résultante $\overrightarrow{R}$, ce vecteur est unique et indépendant du point de réduction,
- Le moment en P du torseur $\overrightarrow{M_P}$.

Remarque: La résultante est donc un vecteur caractéristique du champ qui permet, à partir du moment en un point particulier, de retrouver les autres moments

Invariants d'un torseur

Un torseur possède deux grandeurs indépendantes du point où on l'écrit:

- l'invariant vectoriel : la résultante $\overrightarrow{R}$,
- l'invariant scalaire appelé aussi l'automoment: $A = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{M_B}$

Torseurs particuliers

- Le torseur à résultante ou glisseur est un torseur dont:
  - l'automoment est nul, c'est à dire que le résultante et le moment sont orthogonaux en tout points
  - le moment est nul en tout point de de son axe.
- Le torseur couple est un torseur dont la résultante est nulle.

Vecteur Champ de vecteur et torseur Repères de projection

Opérations sur les torseurs

- Égalité de deux torseurs

$$\{T_1\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_1} \end{array} \right\}_O = \{T_2\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_2} \end{array} \right\}_O \rightarrow \overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{M_1} = \overrightarrow{M_2}$$

- Somme de deux torseurs

$$\{T_1\}_O + \{T_2\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_1} \end{array} \right\}_O + \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_2} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} \end{array} \right\}_O$$

- Multiplication d'un torseur par un scalaire

$$\lambda.\{T_1\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \lambda.\overrightarrow{R_1} \\ \lambda.\overrightarrow{M_1} \end{array} \right\}_O$$

Éléments centraux d'un torseur

- Point central

  Un point central d'un torseur est un point pour lequel la résultante et le moment sont colinéaires :
  Si $\overrightarrow{M_P} = \lambda.\overrightarrow{R}$ alors P est un point central, en P, le moment du torseur est minimum.

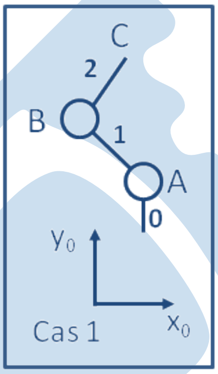
- Détermination de l'axe central

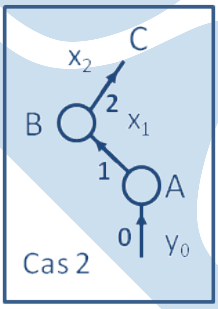
  Soit un torseur $\{T\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \lambda.\overrightarrow{R} \\ \lambda.\overrightarrow{M} \end{array} \right\}_O$
  L'axe central du torseur est la droite parallèle à $\overrightarrow{R}$ et passant par le point P tel que :

  $$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{M_O}}{\overrightarrow{R}^2}$$

Les repères de projection

- Les opérations sur les torseurs et les vecteurs présentées ci-dessus ne sont valables que si ces éléments sont présentés sur le même repère.
- Il sera souvent utile dans le cas d'une résolution de cinématique d'introduire plusieurs repères.
- Ainsi, la suite montre les méthodes pour ramener les torseurs et les vecteurs dans le même repère de description.
- Cas 1: Un repère global
  - R_0: Lié à la pièce 0: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = a_1.\overrightarrow{x_0} + a_2.\overrightarrow{y_0} + b_1.\overrightarrow{x_0} + b_2.\overrightarrow{y_0}$,
  - a_i et b_i sont des variables en fonction du déplacement des pièces.
- Cas 2: Un repère associé à chaque pièce
  - R_0: Lié à la pièce 0, R_1: Lié à la pièce 1, R_2: Lié à la pièce 2.
    $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = a_1.\overrightarrow{x_1} + b_1.\overrightarrow{x_2}$
  - a_i et b_i sont des constantes liées aux dimensions des pièces.





Changement de repère dans les espaces affines

- Soient $R = (O, e)$ et $R' = (O', e')$ deux repères différents, alors les coordonnées. $\overrightarrow{M_{R'}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ s'obtiennent à partir des coordonnées $\overrightarrow{M_R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du même point M mais dans le repère R, à l'aide de 3 équations:

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

- Matriciellement ces équations s'écrivent: $M_{R'} = A.M_R + B$ où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ est la matrice de passage dans V.

Vecteur Champ de vecteur et torseur Repères de projection

Changement d'axes de coordonnées

- Les formules qui suivent permettent d'exprimer les coordonnées d'un point M dans l'un des repères en fonction des coordonnées dans l'autre repère,
- Soit un repère cartésien $O(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ dans lequel les coordonnées (x, y) d'un point M s'expriment en fonction des coordonnées polaires (r, ϕ) par les formules élémentaires

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

- Dans le nouveau repère $O(\overrightarrow{x'}, \overrightarrow{y'})$ déduit du précédent par une rotation d'angle θ les nouvelles coordonnées polaires sont r et $(\phi - \theta)$ et les coordonnées cartésiennes deviennent:

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Changement d'axes de coordonnées

Definition

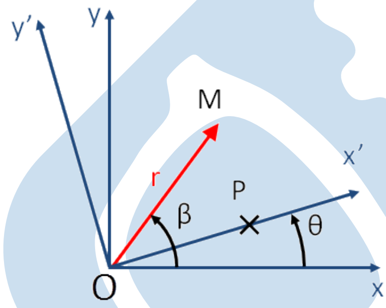
- Les formules suivantes permettant de passer d'un repère à l'autre.

  { ....

  ....
- En sens inverse,

  { ....

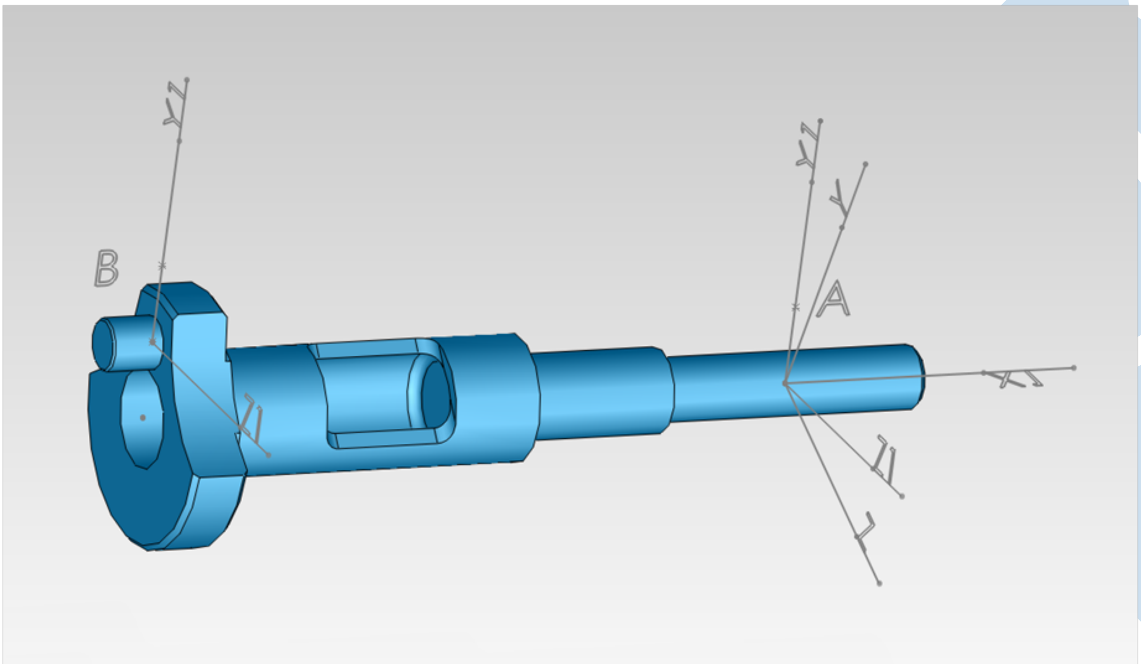
  ....



Remarque : s'il peut s'avérer difficile de mémoriser le signe à mettre devant $sin(\theta)$ (+ dans une ligne et − dans l'autre) l'astuce consiste à considérer un point particulier (tel que P sur la figure) avec $y = 0$ ou $y' = 0$ selon les besoins et de vérifier alors sur la figure le signe de la coordonnée voulue.

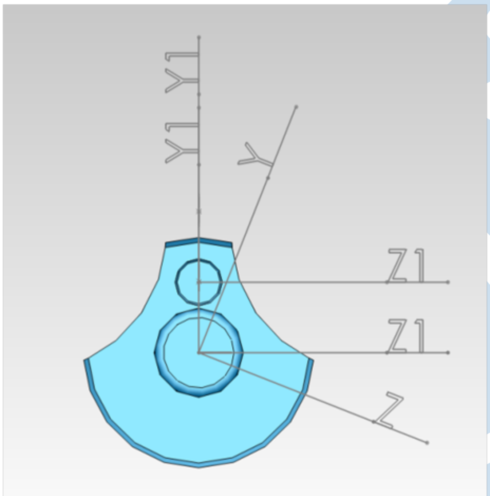
Application

Exemple de pièce munie de deux repères $R(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ et $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$

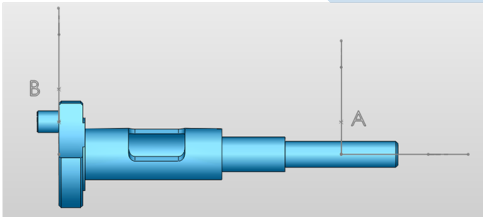


Projection de vecteurs dans une base

Soit θ, l'angle entre Z et Z_1, écrire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, dans les deux repères (choisir les inconnues nécessaires).



Ainsi, les coordonnées d'un vecteur varient selon qu'elles sont écrites dans le repère local ou le repère global.



Conclusion

Savoir

Vous devez être capable de:

- définir un vecteur à partir de sa **direction**, de son **sens** et de sa **norme**,
- projeter des vecteurs dans une base,
- faire un produit scalaire,
- faire un produit vectoriel,
- décrire un champ de vecteur avec un torseur,
- manipuler les éléments de réduction du torseur,
- modifier le repère de projection d'un vecteur.